J.W. Goethe-Universität, Frankfurt am Main

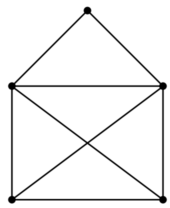
Sommersemester 2008

Prof. Dr. Claus P Schnorr, Antoine Scemama

Diskrete Mathematik, Blatt 1

3.4.08, Abgabe 10.4.08, 12.10 Uhr

Aufgabe 1: Beim Kinderspiel „Das Haus vom Nikolaus“wird ein Haus aus acht Strecken gezeichnet. Dabei soll keine Strecke doppelt durchlaufen und der Stift nie abgesetzt werden. In der Abbildung ist der dadurch entstehende Graph dargestellt.



a) Versuchen Sie das Haus vom Nikolaus zu zeichnen und markieren Sie dabei den Anfangs- und Endpunkt Ihres Zeichenweges.

b) Einen zusammenhängender Zug in einem Graphen heisst *Eulerzug*, wenn jede Kante genau einmal benutzt wird. Zeigen Sie: Gibt es einen Eulerzug in einem Graphen G, so existieren höchstens zwei Knoten mit ungeradem Grad.
Bemerkung: Auch die Rückrichtung dieser Aussage gilt.

c) Ein in sich geschlossener Eulerzug wird *Eulerkreis* genannt. Was muss hier für den Grad der Ecken gelten? (Betrachten Sie beispielsweise das Haus vom Nikolaus. Gibt es hier einen Eulerkreis?)

Aufgabe 2: Zeigen Sie **mittels vollständiger Induktion**, dass jeder Graph eine gerade Anzahl von Knoten mit ungeradem Grad hat. (Satz 2.4 der Vorlesung)

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) $G = (V, E)$ ist ein Baum

(2) G ist maximal kreisfrei, d.h. G ist kreisfrei und für jede Kante $e \in \{\{v_1, v_2\}, v_1, v_2 \in V\} \backslash E$ hat der Graph $(V, E \cup \{e\})$ einen Kreis.

(3) G ist minimal zusammenhängend, d.h. G ist zusammenhängend und für jede Kante $e \in E$ ist $(V, E \backslash \{e\})$ nicht zusammenhängend.

Aufgabe 4: Ein Tupel $(d_1, ..., d_n)$ von natürlichen Zahlen heisst Gradfolge eines Graphen $G = (\{v_1 \dots v_n\}, E)$, wenn $d_1 = deg(v_1), ..., d_n = deg(v_n)$ gilt.

(1) Zeigen Sie, dass G genau dann ein Baum ist, wenn $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$ und G zusammenängend ist.

(2) Zeigen Sie, dass auf einer Party mit n Personen mindestens zwei Personen die selbe Anzahl an Leuten kennt.