J.W. Goethe-Universität, Frankfurt am Main

Sommersemester 2008

Prof. Dr. C.P. Schnorr, Antoine Scemama

Diskrete Mathematik, Übung 3

Aufgabe 1. Sei $p \geq 2$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}_p$ genau dann ein Körper ist, wenn p prim ist.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper.

(1) Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach grad g, dass zu $g, h \in K[x] \setminus \{0\}$ Polynome $r, s \in K[x]$ existieren, so dass $g = s \cdot h + r$ und grad $r <$ grad h.
(2) Zeigen Sie, dass die Zerlegung aus a) eindeutig ist.
(3) Folgern Sie, dass $K[x]$ ein Euklidischer Ring ist.
(4) Bestimmen Sie einen ggT von $x^4 + x^3 + x^2 + 1$ und $x^3 + x^2 + x + 1$ in $\mathbb{Z}_2[x]$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass der Ring $\mathbb{Z}[i]$ der ganzen Gauß'schen Zahl mit der Abbildung $g(a + ib) := ||a + ib||^2 = a^2 + b^2$ Euklidisch ist.
Hinweis: Zeigen Sie, dass zu jedem $z \in \mathbb{C}$ ein $\delta \in \mathbb{Z}[i]$ mit $||z - \delta||^2 \leq \frac{1}{2} < 1$ existiert.

Aufgabe 4. *Ganze Gauß'sche Zahlen.* Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[i] := \{a + bi \ : \ a, b \in \mathbb{Z}\}$ mit $i^2 = -1$ ein kommutativer Ring mit Einselement ist und dass genau vier Elemente von $\mathbb{Z}[i]$ ein multiplikatives Inverses besitzen. Ist $\mathbb{Z}[i]$ ein Integritätsbereich?

Abgabetermin dieses Blattes: 24. April 2008, 12.10 Uhr