Prof. Dr. R. Bieri SS 2006

Frankfurt/M., den 07.06.2006

Lineare Algebra II

Serie 6[1]

Abgabetermin: Montag, 19.06.2006, 8^{15} Uhr.

1. Finde eine unitäre Matrix $U \in U(3)$, die die Hermitesche Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ -i & 1 & i \\ i & -i & 1 \end{pmatrix}$$
diagonalisiert.

2. (a) Zeige: Wenn $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ Hermitesch ist, dann ist $(A - iE_n)$ regulär und $U = (A + iE_n)(A - iE_n)^{-1} = (A - iE_n)^{-1}(A + iE_n)$ unitär.

   (b) Welche unitären Matrizen U kann man als $U = (B + iE_n)(B - iE_n)^{-1}$ mit $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ schreiben? Ist B eindeutig und automatisch Hermitesch ?

3. Es sei $V = \mathbb{C}^n$, versehen mit einem Skalarprodukt $(\ ,\ ) : V \times V \to \mathbb{C}$. Dieses ist gegeben durch eine Hermitesche und positiv definite Matrix $C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, $(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}^t C \overline{\underline{y}}$. Die lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ sei gegeben durch die Matrix $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, $\varphi(\underline{x}) = A\underline{x}$. Bestimme die Matrix B, die $\varphi^{ad} : V \to V$ beschreibt, d.h. $\varphi^{ad}(\underline{x}) = B\underline{x}$.

   Explizites Beispiel: $V = \mathbb{C}^2$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}$.

4. Finde orthogonale Matrizen, die die symmetrischen Matrizen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
diagonalisieren.

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri/