Prof. Dr. R. Bieri SS 2006

Frankfurt/M., den 26.05.2006

Lineare Algebra II

Serie 5[1]

Abgabetermin: Donnerstag, 08.06.2006, 8^{15} Uhr.

1. Es sei V ein Euklidischer Vektorraum, $u \in V$ mit $\| u \| = 1$, und $U = \mathbb{R}u$. Man beschreibe mit Hilfe des Skalarprodukts die Endomorphismen $\varphi, \psi, \sigma : V \to V$, wobei

   $\varphi =$ orthogonale Projektion von V auf U.

   $\psi =$ orthogonale Projektion von V auf $U^\perp$.

   $\sigma =$ Spiegelung von V am Hyperraum $U^\perp$.

2. (a) Wähle in Aufgabe 1 speziell $V = \mathbb{R}^n$ mit dem Standard-Skalarprodukt. Bestimme die Matrizen $A, B, C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, die φ, ψ bzw. σ beschreiben $\big($in Abhängigkeit von $\underline{\mathrm{u}} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)\big)$. [zur Kontrolle verifiziere man, dass C orthogonal ist !]

   (b) Für gegebene Tupel $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ mit $\| \underline{x} \| = \| \underline{y} \|$ finde man $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$, mit $\| \underline{u} \| = 1$, sodass für die oben bestimmte Matrix C, $\quad \underline{y} = C\underline{x}$ gilt.

3. Suche $U \in SU(2)$ mit $U^t \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \overline{U}$ diagonal.

4. Man zeige, dass Eigenvektoren v_1, v_2 einer unitären Matrix $U \in U(n)$ zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1 \neq \lambda_2$ orthogonal sind.

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri/