Prof. Dr. R. Bieri SS 2006

Frankfurt/M., den 08.05.2006

Lineare Algebra II

Serie 3[1]

Abgabetermin: Montag, 22.05.2006, 8^{15} Uhr.

1. (a) Bestimme Rang und Trägheitsindex der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 5 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_4(\mathbb{R}).$$

   (b) Suche $S \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ mit $S^t AS = \begin{pmatrix} E_k & 0 & 0 \\ 0 & -E_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Es sei V ein Vektorraum über $K = \mathbb{F}_2$ mit $1 \leq \dim V = n < \infty$. Zeige oder widerlege:

   (a) Jede quadratische Form $q : V \to K$ ist linear (und jede Linearform ist quadratisch).

   (b) Zu jeder symmetrischen Bilinearform $\phi : V \times V \to K$ gibt es isotrope Vektoren $v \neq \overrightarrow{0}$.

   (c) Die Menge aller isotropen Vektoren ist gleich dem Ausartungsraum der Bilinearform.

3. Es sei $V = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller 2×2-Matrizen über $\mathbb{R}$.

   (a) Zeige: $\phi(A, B) := \det(A + B) - \det(A) - \det(B)$ definiert eine symmetrische Bilinearform.

   (b) Berechne die Matrix dieser Bilinearform bez. der Standardbasis und bestimme Rang und Trägheitsindex.

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri/

(c) Bestimme die Matrix, Rang und Trägheitsindex der Einschränkung $\phi/_U$ auf den Unterraum $U \leq V$. $\quad U = \{A \in V \mid \mathrm{Spur}(A) = 0\}$.

4. Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper K. Für jeden Unterraum $U \leq V$ definiere

$$U^{\perp} := \{f \in V^* \mid f(U) = 0\}.$$

(a) Zeige: $U^{\perp} \leq V^*$ ist ein Unterraum.

(b) Bestimme $\dim U^{\perp}$.

(c) Finde eine kanonische Bijektion.

$\{\text{Unterräume von } V\} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \{\text{Unterräume von } V^*\}$