Prof. Dr. R. Bieri SS 2006

Frankfurt/M., den 03.05.2006

Lineare Algebra II

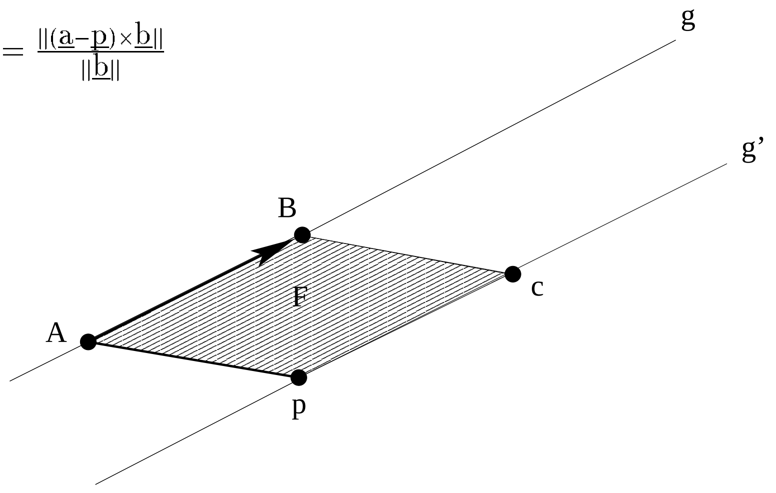
Serie 2[1]

Abgabetermin: Montag, 15.05.2006, 8^{15} Uhr.

1. Gesucht ist eine Ebene $E \subseteq \mathbb{E}^3$, die die Punkte $A(1,2,0)$ und $B(0,4,2)$ enthält, und die vom Nullpunkt den Abstand 2 hat. Ist E eindeutig bestimmt?

2. Zur Herleitung einer Formel für den Abstand d des Punktes $P(\underline{p})$ von der Geraden $g = \underline{a} + \mathbb{R}\underline{b}$ betrachte man die zu g parallele Gerade $g' = \underline{p} + \mathbb{R}\underline{b}$ und das dazwischenliegende Parallelogramm F mit den Ecken $A(\underline{a})$, $B(\underline{a}+\underline{b})$, P , $C(\underline{p}+\underline{b})$. Die Fläche von F ist einerseits $= \| (\underline{a}-\underline{p}) \times \underline{b} \|$, und andererseits $\| \underline{b} \| \cdot d$ (Grundlinie mal Höhe). Daraus folgt

$$d = \frac{\|(\underline{a}-\underline{p})\times\underline{b}\|}{\|\underline{b}\|}$$



Finde mit einer analogen Methode eine Formel für den Abstand von 2 windschiefen Geraden $g_i = \underline{a}_i + \mathbb{R}\underline{b}_i$, $i = 1,2$. [Anschließend berechne man diesen im Fall $\underline{a}_1 = (2,-3,-1)$, $\underline{a}_2 = (-3,4,1)$, $\underline{b}_1 = (1,0,1)$, $\underline{b}_2 = (2,2,1)$.

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri/

3. Es sei $F = V \to W$ eine lineare Abbildung von Vektorräumen über K. f induziert eine Abbildung der Dualräume $f^* : W^* \to V^*$, die einfach dadurch gegeben ist, dass $\varphi : W \to K$ mit $f : V \to W$ komponiert wird: $f^*(\varphi) = \varphi \cdot f$.

   Zeige:

   (a) f surjektiv $\Leftrightarrow$ f^* injektiv.

   (b) f injektiv $\Leftrightarrow$ f^* surjektiv.

4. Im Vektorraum $V = \mathbb{F}_2^4$ betrachte man die Bilinearform $\phi : V \times V \to \mathbb{F}_2$

$$\phi(\underline{x}, \underline{y}) = (x_1 y_4 + x_4 y_1) + (x_2 y_3 + x_3 y_2) + (x_2 y_4 + x_4 y_2).$$

   (a) Bestimme die Matrix C, die ϕ bez. der Standardbasis beschreibt.

   (b) Gibt es einen Vektor $v \in V$ mit $\phi(v, v) \neq 0$? Ist V ausgeartet?

   (c) Suche zweidimensionale Unterräume mit $V = V_1 \oplus V_2$, $\phi(V_1, V_2) = 0$.

   (d) Suche $S \in GL_4(\mathbb{F}_2)$ mit

$$S^t C S = \left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & * \end{array} \right).$$