Prof. Dr. R. Bieri WS 2005/2006

Lineare Algebra I

Serie 7 [1]

Abgabetermin: Montag, 19.12.2005, 8^{15} Uhr.

1. Es sei $M \in \mathbb{M}_2(K)$ gegeben. Wir betrachten $V = \mathbb{M}_2(K)$ als Vektorraum über K und definieren die Abbildung $\triangle : V \to V$ durch $\triangle(A) = AM - MA$.

   (a) Zeige: $\triangle$ ist linear und nicht surjektiv.

   (b) Bestimme $\ker\triangle$ (Dimesion, Basis), wenn $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ 2:=1+1, 3:=1+1+1

   (c) Wie b), aber für beliebiges $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

2. Es sei V der $\mathbb{R}-$Vektorraum der Polynomfunktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad ≤ 3. Man betrachte die Abbildung $D : V \to V$, gegeben durch $D\big(f(x)\big) = af(x) + (bx+c)f'(x)$.

   (a) Zeige, dass D linear ist, bestimme eine Basis von V und beschreibe D bez. dieser Basis durch eine Matrix.

   (b) Bestimme den Rang von D (in Abhängigkeit von a, b, c).

3. Es seien A und B zwei Matrizen mit Einträgen im Körper K. Zeige: Wenn das Produkt AB definiert ist, dann gilt: Rang $(AB) \leq \min\big(\mathrm{Rang}(A), \mathrm{Rang}(B)\big)$. (Hint.: man interpretiere den Rang als die Dimension des Bildes einer linearen Abbildung).

4. (a) Es sei $U \leq \mathbb{R}^4$ der von $\underline{x} = (1,2,3,4)$, $\underline{y} = (0,1,2,3)$, $\underline{z} = (4,2,0,-2)$ aufgespannte Unterraum. Suche eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to W$ mit $U = \ker f$.

   (b) Zeige allgemein: Jeder Unterraum $U \leq V$ ist Kern einer linearen Abbildung $f : V \to W$.

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri/