Prof. Dr. R. Bieri WS 2005/2006

Lineare Algebra I

Serie 6 [1]

Abgabetermin: Montag, 12.12.2005, 8^{15} Uhr.

1. Auf eine Matrix $A \in \mathbb{M}_{mn}(K)$ will man eine elementare Zeilentransformation Z und eine elementare Spaltentransformation S ausüben. Zeige oder widerlege: Die resultierende Matrix A' hängt nicht davon ab, ob zuerst Z und dann S oder zuerst S und dann Z ausgeübt werden.

2. (a) Zeige: Zu jeder Elementarmatrix $X \in \mathbb{M}_{2,2}(K)$ gibt es eine inverse Matrix X^{-1} , $X^{-1}X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = XX^{-1}$.

   (b) Zeige: Jede reguläre 2×2 Matrix ist Produkt von höchstens 5 [2] Elementarmatrizen; suche die Zerlegung von $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

   (c) Wieviele Elementarmatrizen braucht man, um eine allgemeine Matrix $A \in GL(n,k)$ als Produkt zu schreiben?

3. Zeige: Die 4–Tupel $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (0,1,2,3)$, $v_3 = (-1,-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $v_4 = (1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4})$ bilden eine Basis von $\mathbb{Q}^4$; suche die Transformationsmatrizen T, S für die Basiswechsel

$$(v_1, v_2, v_3, v_4) \longleftrightarrow (e_1, e_2, e_3, e_4).$$

4. Es sei V der $\mathbb{F}_2$–Vektorraum der Teilmengen von $M = \{1,2,3,4,5\}$. Zeige, dass

   - $v_1 = \{1,2,3\}$, $v_2 = \{2,3,4\}$, $v_3 = \{3,4,5\}$, $v_4 = \{4,5,1\}$, $v_5 = \{5,1,2\}$ und
   - $w_1 = \{1,2,4\}$, $w_2 = \{2,3,5\}$, $w_3 = \{3,4,1\}$, $w_4 = \{4,5,2\}$, $w_5 = \{5,1,3\}$

   Basen von V sind und bestimme die Matrizen T, S der Koordinatentransformation beim Wechsel $v_i \longleftrightarrow w_i$.

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri/

[2] Anmerkung: Es geht sogar mit höchstens 4 (!)