Prof. Dr. R. Bieri WS 2005/2006

Lineare Algebra I

Serie 4 [1]

Abgabetermin: Montag, 28.11.2005, 8^{15} Uhr.

1. Es gibt einen Körper mit 4 Elementen. Finde seine Additions- und Multiplikationstafeln.

2. (a) Zeige, dass die 4 Funktionen $f_n(x) := \cos(nx)(n = 0, 1, 2, 3)$ linear unabhängig sind.

   (b) Gilt das auch für $f_n(x) := \sin(nx)$?

3. Es sei $V = \mathrm{Abb}(I, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}-$Vektorraum aller auf dem Intervall $I = [-1, 1]$ definierten reellen Funktionen.

   (a) Sind zwei Vektoren der Form $f(x),\ xf(x)$ stets linear abhängig? Oder nur für spezielle Funktionen $f(x)$?

   (b) Welche der folgenden Teilengen X_i sind Unterräume von V?

$$\begin{aligned} X_1 :&= \{f \in V \mid f(0) = f(1)\} \\ X_2 :&= \{f \in V \mid f(x) = -f(-x),\ \text{alle } x \in I\} \\ X_3 :&= \{f \in V \mid f(x^2) = f(x)^2,\ \text{alle } x \in I\} \end{aligned}$$

4. Es seien u, v, w linear unabhängige Vektoren eines Vektorraums V über dem Körper K.

   (a) Für welche $\alpha, \beta \in K$ sind $\alpha u + v,\ u + \beta v$ linear unabhängig?

   (b) Für welche Körper K sind $u + v,\ v + w,\ w + u$ linear unabhängig?

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri/