Prof. Dr. R. Bieri WS 2005/2006

Lineare Algebra I

Serie 3 [1]

Abgabetermin: Montag, 21.11.2005, 8^{15} Uhr.

1. Für eine endliche Abelsche Gruppe $(A,+)$, $A=\{e,a_2,\ldots,a_n\}$ betrachte man die „Gruppentafel“ (x_{ij}), $x_{ij}=a_i*a_j$. Zeige: In jeder Zeile und in jeder Spalte von (x_{ij}) steht jedes Element von A genau einmal.

$*$	e	a_2	$\ldots$	a_n
e	x_{11}	x_{12}		x_{1n}
a_2	x_{21}	x_{22}		x_{2n}
$\vdots$	$\vdots$			
a_n	x_{n1}	x_{n2}		x_{nn}

   Suche die Gruppentafeln für $A=\{e,a,b,c\}$ (4 Elemente). Zeige, daß in diesem Falle für alle $x\in A \quad x^4=e$ ist.

2. In manchen Lehrbüchern wird „Körper“ fälschlicherweise definiert als Menge $(K,+,\bullet)$ mit 2 Verknüpfungen, sodass $(K,+)$ und $(K-\{0\},\bullet)$ Abelsche Gruppen sind und das Distributivgesetz $a(b+c)=ab+ac$(alle $a,b,c\in k$) gilt. Welches Körperaxiom wird dadurch nicht abgedeckt? Zeige: Wenn man auf $\mathbb{Q}$ eine neue „Multiplikation“ definiert durch $a*b:=\{\begin{smallmatrix} ab & \text{wenn } a\neq 0 \\ b & '' \quad a=0\end{smallmatrix}$, dann ist $(\mathbb{Q},+,*)$ kein Körper, obwohl die oben genannten Eigenschaften erfüllt sind.

3. Es sei $A\in\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{F}_2)$ eine Matrix und $\underline{b}\in\mathbb{F}_2^m$ ein „Spaltenvektor“ mit Einträgen im Körper $\mathbb{F}_2=\{0,1\}$. Dann kann man das Austauschverfahren auch zur Lösung des Gleichungssystems $A\underline{x}=\underline{b}$ verwenden.

   (a) Wie lauten die Regeln für die Pivot-Transformation in diesem Fall?

   (b) Man finde die Lösungsmenge im Falle

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{F}_2).$$

4. Suche ein lineares Gleichungssystem, $A\underline{x}=\underline{b}$ mit der Lösungsmenge

   (a) $L_a=\{(1,2+t,3-4t)\mid t\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{R}^3$.

   (b) $L_b=\{(s+t,s-t,2s+3t+4)\mid s,t\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{R}^3$.

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri/