Prof. Dr. R. Bieri WS 2005/2006

Lineare Algebra I

Serie 11 [1]

Abgabetermin: Montag, 30.01.2006, 8^{15} Uhr.

„Skalarprodukt“ über einem beliebigen Körper K

Im Folgenden sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K, versehen mit einer symmetrischen Bilinearform $(\ ,\ ) : V \times V \to K$. Als Ersatz für „positiv definit“ setzen wir voraus, dass $(\ ,\ )$ nicht-ausgeartet ist, d.h. $(v, V) \neq \{0\}$ für alle $v \in V - \{\vec{0}\}$. $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ sei eine Basis von V.

1. Betrachte die lineare Abbildung $\varphi : V \to K^n, \varphi(v) := \big((v, v_1), \ldots, (v, v_n)\big)$. Zeige: φ ist ein Isomorphismus und $C = \big((v_i, v_j)\big) \in \mathrm{GL}_n(K)$.

2. Ist $U \leq V$, dann definiert man $U^\perp := \big\{v \in V \mid (v, U) = \{0\}\big\}$.

   (a) Zeige: $U^\perp \leq V$.

   (b) Wähle eine Basis $u_1, \ldots, u_m \in U$ und zeige, dass $\varphi : V \to K^m$, $\varphi(v) := \big((v, u_1), \ldots (v, u_m)\big)$ surjektiv ist mit $\ker\varphi = U^\perp$. (Hint: Ergänze zu Basis von V und benutze Aufgabe 1.)

   (c) Zeige $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$ und $U^{\perp\perp} = U$.

3. (a) Zeige: Für jeden Unterraum $U \leq V$ gilt:
   $V = U \oplus U^\perp \iff (.,.) : U \times U \to K$ nicht-ausgeartet.

   (b) Zeige: Wenn $K = \mathbb{F}_2$ ist und $\dim V \geq 2$, dann enthält V Vektoren $v \neq \vec{0}$ mit $(v, v) = 0$ und ausgeartete Unterräume.

4. Es sei $K = \mathbb{F}_2$ und $(v, v) = 0$ für alle $v \in V$. Zeige: $\dim V$ ist gerade. (Hint: Zeige: V ist direkte Summe von $2-$dimensionalen Unterräumen $V = \oplus U_i$, die jeweils eine Basis u_i, u_i' mit $(u_i, u_i') = 1$ haben.

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri/