Prof. Dr. R. Bieri WS 2005/2006

Frankfurt/M., den 26.10.2004

Lineare Algebra I

Serie 1[1]

Abgabetermin: Montag, 07.11.2005, 8^{15} Uhr.

1. Zur gegebenen Abbildung $f : X \to Y$ betrachte man die Abbildungen

$$f_* : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)\ ,\ f_*(A) := \{f(a) \mid a \in A\}$$
$$f^* : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)\ ,\ f^*(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

   (a) Beschreibe die Kompositionen $f_* \cdot f^*$ und $f^* \cdot f_*$. Wann sind diese gleich $\mathrm{Id}_{\mathcal{P}(Y)}$ (bzw. $\mathrm{Id}_{\mathcal{P}(X)}$)?

   (b) Untersuche, unter welchen Umständen f_* bzw. f^* injektiv, surjektiv, bijektiv sind.

2. Es sei $f : X \to \mathcal{P}(X)$ eine Abbildung, die jedem $x \in X$ eine Teilmenge von X , $f(x) \subseteq X$, zuordnet.

   (a) Es sei $U := \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$. Zeige, dass $U \subseteq X$ nicht im Bild von X unter f liegen kann!

   (b) Zeige: Es gibt keine surjektive Abbildung $X \twoheadrightarrow \mathcal{P}(X)$ und keine injektive Abbildung $\mathcal{P}(X) \rightarrowtail X$.

3. Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Beweise oder widerlege die Aussagen:

   (a) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, gilt für alle $A, B \in \mathcal{P}(X)$.

   (b) Gilt $f(A^c) = f(A)^c$ für alle $A \in \mathcal{P}(X)$, dann ist f bijektiv.

   (c) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, gilt für alle $A, B \in \mathcal{P}(X)$.

   (d) $A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$, gilt für alle $A, B \in \mathcal{P}(X)$.

4. Beweise: $1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri/