

Frankfurt/M., den 4.12.2003

Ausgewählte Kapitel aus der GruppentheorieSerie 8 ¹

Abgabetermin: Montag, 15.12.2003

1. Man bestimme den Rang und den Index der Kongruenzuntergruppen $H(p^k) = \ker(SL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow SL_2(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}))$ in $SL_2(\mathbb{Z})$.

[**Anleitung:** Wenn die Gruppe G eine freie Untergruppe $F \leq G$ mit $|G:F| < \infty$ enthält, definiere man $\chi(G) := \frac{1}{|G:F|}(1 - \text{Rang}F)$. Man zeige, dass $\chi(G)$ unabhängig von der speziellen Wahl von F ist, und dass für Untergruppen $H \leq G$ von endl. Index $|G:H|$ gilt: $\chi(H) = |G:H| \cdot \chi(G)$. Dann bestimmt man $\chi(PSL_2(\mathbb{Z}))$ mittels $H(2)$.]

2. Zeige: Residuell endliche p -Gruppen von endlichem Prüfer-Rang enthalten eine auflösbare Untergruppe von endlichem Index. [Hint. Charakterisierung der linearen Gruppen und Tits-Alternative verwenden].
3. Suche eine Präsentation der symmetrischen Gruppe S_m bez. dem Erzeugendensystem **aller** Transpositionen. (i, j) .
4. Welche Gruppen verstecken sich hinter den Präsentierungen $G = \langle a, b \mid a^b = a^2, b^a = b^2 \rangle$ $H = \langle x, y \mid xyxyx = 1 \rangle$?

¹ auch als pdf-Datei im Internet unter: <http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri>