Prof. Dr. R. Bieri WS 2003/2004

Frankfurt/M., den 28.11.2003

Ausgewählte Kapital aus der Gruppentheorie

Serie 7 [1]

Abgabetermin: Montag, 8.12.2003

1. (a) Zeige: Wenn die Gruppe G eine torsionsfreie Untergruppe von endlichem Index d enthält, dann ist jede Torsionsuntergruppe endlich der Ordnung $\leq d$.

   (b) Zeige: die von $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ in $GL_2\big(\mathbb{F}_p(t)\big)$ erzeugte Untergruppe enthält keine torsionsfreie Untergruppe von endlichem Index.

2. Zeige: Jede echte Untergruppe L von $\mathbb{Q}^{add}$ ist residuell endlich. Welche Untergruppen L sind residuell endliche $p-$Gruppen? In $\mathbb{Q}^2$ finde man eine echte Untergruppe $A \leq \mathbb{Q}^2$, die nicht residuell endlich ist.

3. Bestimme alle Homomorphismen $\mathbb{Z}[\frac{1}{m}] \to \mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$, und $\mathrm{Aut}(L)$ für alle $L \leq \mathbb{Q}^{add}$.

4. Es sei G eine endlich erzeugte Untergruppe von $GL_n(\mathbb{Q})$. Zeige: G enthält keine Untergruppe isomorph zu $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_{(p)}$ oder $\mathbb{Z}(p^\infty)$.

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri