Prof. Dr. R. Bieri WS 2003/2004

Frankfurt/M., den 21.11.2003

Ausgewählte Kapital aus der Gruppentheorie

Serie 6 [1]

Abgabetermin: Montag, 1.12.2003

1. Es sei G eine Gruppe. Wenn es zwei Primzahlen $p \neq q$ gibt, sodass G sowohl residuell-endliche$-p-$Gruppe als auch residuell-endliche$-q-$Gruppe ist, dann ist G torsionsfrei.

2. Zeige: Die Prüfergruppe $\mathbb{Z}(p^\infty) = \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]/\mathbb{Z}$ ist nicht Hopfsch.

3. Die Gruppe G sei die Vereinigung einer aufsteigenden Folge von Untergruppen $F_1 \leq F_2 \leq F_3 \leq \ldots \quad G = \cup F_i$, wobei alle F_i frei vom Rang $\leq r$ sind (z.B. $G = \mathbb{Q}$, mit $F_i = \frac{1}{i!}\mathbb{Z}$). Zeige: G ist Hopfsch. [**Hint.** Sei $N \trianglelefteq G$ mit $N \neq 1$ und $G/N \cong G$ und $r > 1$, zeige, dass dann G auch als aufsteigende Vereinigung von freien Untergruppen vom Rang $r - 1$ geschrieben werden kann und leite daraus einen Widerspruch ab.]

4. Es sei A eine torsionsfreie Abelsche Gruppe, $B \leq A$ eine Untergruppe und $\varphi : B \rightarrowtail \mathbb{Q}^n$ ein injektiver Homomorphismus.

   (a) Zeige: Wenn $a \in A$ mit $a \notin B$ ist, und $m \in \mathbb{N}$ mit $ma \in B$, dann lässt sich φ auf eindeutige Weise zu einer Einbettung $\tilde{\varphi} : gp(B, a) \rightarrowtail \mathbb{Q}^n$ fortsetzen.

   (b) Beweise: Jede torsionsfreie Abelsche Gruppe von endlichem Prüfer-Rang $\leq n$ ist isomorph zu einer Untergruppe von $\mathbb{Q}^n$.

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri