Prof. Dr. R. Bieri WS 2003/2004

Frankfurt/M., den 14.11.2003

Ausgewählte Kapital aus der Gruppentheorie

Serie 5 [1]

Abgabetermin: Montag, 24.11.2003

1. Es sei Γ ein freier $G-$Graph mit endlichem Faktorgraph $G\backslash\Gamma$, und Γ' ein beliebiger $G-$Graph. Zeige: Es gibt eine geometrische $G-$Graphen Abbildung $f : \Gamma \to \Gamma'$ und eine Konstante $\lambda \geq 1$, sodass
$$d'\big(f(v_1), f(v_2)\big) \leq \lambda \; d(v_1, v_2),$$
für alle $v_1, v_2 \in \mathrm{ver}\Gamma$.

2. Es seien Γ, Γ' zwei freie $G-$Graphen mit endlichen Faktorgraphen. Zeige: es gibt geometrische $G-$Graphen Abbildungen $\Gamma \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \Gamma'$ und Konstanten λ, C, sodass für alle $v_1, v_2 \in \mathrm{ver}\Gamma$ gilt
$$d\big(gf(v_1), v_2\big) \leq C$$
und
$$\frac{1}{\lambda}\; d(v_1, v_2) - C \leq d'\big(f(v_1), f(v_2)\big) \leq \lambda d(v_1, v_2) + C$$
(und analog für alle $v_1', v_2' \in \mathrm{ver}\Gamma'$).
[Bemerkung: Γ, Γ' sind also quasi-isometrisch. Viele gruppentheoretische Eigenschaften sind invariant unter quasi-Isometrie; z.B. Hyperbolizität. Wende das Resultat an auf Cayley-Graphen bez. verschiedenen Erzeugendensystemen.]

3. Es sei $h : \Pi(\Gamma) \to \mathbb{Z}E$ der Hurewicz-Homomorphismus vom Kantenweggruppoid eines Graphen $\Gamma : (V, E, \alpha, \beta)$ in die $1-$Ketten $\mathbb{Z}E$. Zeige: Der Kern der Einschränkung von h auf $\pi(\Gamma, v)$ ist die Kommutatoruntergruppe von $\pi(\Gamma, v)$, $v \in V$.

4. Es sei F die freie Gruppe über $\{x, y\}$. Suche eine Basis von $gp(xy, y^3) \cap gp(x^3, yx)$.

---

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri