Prof. Dr. R. Bieri WS 2003/2004

Frankfurt/M., den 8.1.2004

Ausgewählte Kapitel aus der Gruppentheorie
Serie 10 [1]

Abgabetermin: Montag, 19.1.2004

1. Es seien A, B Gruppen, $U \le A$, $V \le B$ Untergruppen und $\varphi : U \to V$ ein Isomorphismus. Über dem freien Produkt $F := A * B$ bilde man die HNN-Erweiterung $H = \langle F, t \mid tUt^{-1} = V \rangle$. Zeige, dass $\psi : A *_U B \to H$, $\psi(a) = tat^{-1}$, $\psi(b) = b$ einen Homomorphismus definiert, der dazu verwendet werden kann, den Normalformensatz für $A *_U B$ aus demjenigen von H zu beweisen (und übrigends ist ψ injektiv).

2. Es sei A eine Gruppe, $U, V \le A$ isomorphe Untergruppen und $H = \langle A, t \mid tut^{-1} = V \rangle$ die entsprechende HNN-Gruppe. Im freien Produkt $P(r) = A * \langle r \mid - \rangle$ betrachte man die Untergruppe $U(r) := \mathrm{gp}(A, rUr^{-1}) \le P(r)$ und zeige, $U(r) \cong A * U$. Dann bilde man das freie Produkt mit Amalgam
$$G = P(r) *_{U(r)=V(s)} P(s)$$
und finde einen injektiven Homomorphismus $H \rightarrowtail G$.

3. Zeige (mittels iterierter HNN-Konstruktionen), dass man jede abzählbare torsionsfreie Gruppe G einbetten kann in eine abzählbare Gruppe, die nur 2 Konjugationsklassen hat! Welches sind die endlichen Gruppen mit 2 Konjugationsklassen?

4. Zeige: Das freie Produkt $A * B$ ist genau dann endlich erzeugbar, wenn beide Faktoren es sind. Ebenso für „endlich präsentierbar".

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri