Prof. Dr. R. Bieri WS 2006/2007

Frankfurt/M., den 08.12.2006

Einführung in Algebra und Zahlentheorie

Serie 8[1]

Abgabetermin: Montag, 18.12.2006, 8^{15} Uhr.

1. Es sei $\varphi : \mathbb{Z}_2 \to Aut(\mathbb{Z}_n)$ eine Operation von $\mathbb{Z}_2$ auf $\mathbb{Z}_n$ und $G = \mathbb{Z}_n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}_2$ das dazugehörige semi-direkte Produkt. $\varphi([1]) : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ sei gegeben durch Multiplikation mit $k \in \mathbb{N}$.
   (a) Welche Bedingungen muss k erfüllen ?
   (b) Bestimme die Kommutatoruntergruppe $G' \leq G$ und die Faktorgruppe G/G'.
   (c) Für $m = 15$ finde man alle Gruppen der Form $G = \mathbb{Z}_m \rtimes \mathbb{Z}_2$ bis auf Isomorphie.
2. Es sei G eine Gruppe der Ordnung 30. Zeige:
   (a) G enthält entweder $\mathbb{Z}_3$ oder $\mathbb{Z}_5$ als Normalteiler.
   (b) G enthält eine zyklische Untergruppe vom Index 2.
   (c) Wieviele nicht-isomorphe Gruppen der Ordnung 30 gibt es ?
3. Es sei G eine nicht-abelsche endliche $p-$Gruppe mit Zentrum Z. Zeige.
   (a) Für jeden Normalteiler $e \neq N \lhd G$ gilt $N \cap Z \neq e$.
   (b) Es gibt keine Untergruppe $H \leq G$ mit $G = Z \rtimes H$.
4. Wieviele Normalteiler gibt es im direkten Produkt $G = H \times K$ von zwei endlichen einfachen Gruppen ?
   (Hint: Beachte, dass die Projektion $\pi : G \twoheadrightarrow H$ jeden Normalteiler $N \lhd G$ auf einen Normalteiler $\pi(N) \lhd H$ abbildet, und zeige, dass für alle $x \in H, y \in \pi(N)$ die Kommutatoren $[x, y]$ in $N \cap H$ sind.)

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri/