Prof. Dr. R. Bieri WS 2006/2007

Frankfurt/M., den 30.11.2006

Einführung in Algebra und Zahlentheorie

Serie 7[1]

Abgabetermin: Montag, 11.12.2006, 8^{15} Uhr.

1. Es sei G die volle Symmetriegruppe des Würfels. Man finde
   (a) die Ordnung $|\ G\ |$
   (b) einen surjektiven Homomorphismus $\vartheta : G \twoheadrightarrow S_4$ und seinen Kern
   (c) alle Normalteiler von G.
2. In den Gruppen S_5 und A_5
   (a) zeige man: jede echte Untergruppe vom Index ≤ 6 ist maximal
   (b) finde man den Normalisator der zyklischen Untergruppe $gp\big((1,2,3,4,5)\big)$.
3. (a) Verwende die Operation von $G = PSL_2(K)$ auf der Menge aller $1-$dimensionalen Unterräume von K^2, um einen Homomorphismus $\varphi : G \to S_m$ zu finden.
   (b) Für $K = \mathbb{F}_q$ $(q = 2, 3)$ finde man eine Beschreibung von $PSL_2(\mathbb{F}_q)$ als Permutationsgruppe vom Grad $q + 1$, und zeige, dass $PSL_2(\mathbb{F}_4)$ nicht einfach ist.
4. Es sei G eine Gruppe, $U \leq G$ eine Untergruppe, $C(U) = \{a \in G \mid au = ua$ für alle $u \in U\}$ ihr Zentralisator und $N(U) = \{a \in G \mid aU = Ua\}$ ihr Normalisator.
   Zeige: $C(U)$ ist Normalteiler von $N(U)$, und $N(U)/C(U)$ ist isomorph zu einer Untergruppe von $Aut(U)$.

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri/