Prof. Dr. R. Bieri | WS 2006/2007

Frankfurt/M., den 23.11.2006

Einführung in Algebra und Zahlentheorie

Serie 6[1]

Abgabetermin: Montag, 04.12.2006, 8^{15} Uhr.

Notation: ${}^a b := aba^{-1}$, ${}^a U = aUa^{-1}$ $(a, b \in G,\ U \le G)$.

1. Es sei τ eine Transposition und σ eine beliebige Permutation $\neq e$ in S_m.
   (a) Zeige $\sigma \cdot {}^\tau\sigma = {}^\tau\sigma \cdot \sigma \Leftrightarrow {}^\sigma\tau \cdot \tau = \tau \cdot {}^{\sigma^{-1}}\tau$.
   (b) Untersuche, unter welchen Bedingungen $\big(($an σ und $\tau = (i, j)\big)$ σ und ${}^\tau\sigma$ kommutieren.
   (c) Suche alle $\sigma \in S_m$, $\sigma \neq e$ mit der Eigenschaft, dass σ und ${}^\tau\sigma$ für **alle** Transpositionen $\tau \in S_m$ kommutieren. Zeige, dass dann $m = 3$ oder (m gerade und $\sigma^2 = e$) sein muss.

2. Es sei G eine Gruppe, $U \le G$ eine Untergruppe, $N \lhd G$ ein Normalteiler und $T \subseteq G$ ein Vertretersystem von G/N. Zeige:
   (a) Der Durchschnitt $\bigcup\limits_x {}^x U$ aller zu U konjugierten Untergruppen ist ein Normalteiler von G,
   (b) Sei M ein Normalteiler von N. Dann ist M nicht notwendigerweise Normalteiler von G (Beispiel?); aber jede zu M konjugierte Untergruppe ${}^x M$ ist Normalteiler von N und von der Form ${}^x M = {}^t M \quad (t \in T)$.

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri/

3. Es sei $N \lhd G$ der **einzige** Normalteiler einer Gruppe G (ausser e, G), und es sei überdies $\mid G/N \mid = 2$. Wir wollen nach Normalteilern $e \neq M \underset{\neq}{\lhd} N$ suchen, und wählen dazu ein beliebiges Element $x \epsilon G \setminus N$. Zeige:

   (a) ${}^{x}M$ ist ein Normalteiler von N.

   (b) $M \cap {}^{x}M$ und $M \cdot {}^{x}M$ sind Normalteiler von G.

   (c) N ist das direkte Produkt von M und ${}^{x}M$, und schließe daraus, dass $m \in M$ mit ${}^{x}m$ kommutiert.

   (d) Beweise, dass die alternierende Gruppe A_m für $m \geq 5$ keinen Normalteiler $\neq e, A_m$ besitzt.
   (Hint: Verwende Aufgabe 1 und die Tatsache, dass A_m der einzige echte, nicht-triviale Normalteiler von S_m ist).

4. Es sei $G = \mathrm{Isom}^{+}(\mathbb{E}^2)$ die Gruppe der orientierungserhaltenden Isometrien der Euklidischen Ebene.

   (a) Beschreibe die Konjugationsklassen von G geometrisch.

   (b) Zeige: Sind $\alpha = \rho_{A,\varphi}$, $\beta = \rho_{B,\varphi}$ Rotationen mit demselben Drehwinkel φ, dann ist $\alpha\beta^{-1}$ eine Translation $\tau_{\vec{a}}$. Bestimme den Vektor $\vec{a}$ aus α und β.

   (c) Zeige: Jeder Normalteiler $N \trianglelefteq G$, $N \neq e$, enthält die volle Translationsgruppe.