Prof. Dr. R. Bieri WS 2006/2007

Frankfurt/M., den 016.11.2006

**Einführung in Algebra und Zahlentheorie**

Serie 5[1]

Abgabetermin: Montag, 27.11.2006, $8^{15}$ Uhr.

1. Im Folgenden sei
   - $\Pi \subseteq \mathbb{N}$ die Menge aller Primzahlen.
   - $\pi(n) \subseteq \Pi$ die Menge aller Primteiler von $n \in \mathbb{N}$, und
   - $\pi(G) \subseteq \Pi$ die Menge aller $p \in \Pi$, die Ordnung eines Elementes der Gruppe $G$ sind.

   Begründe, warum $\pi(G) \subseteq \pi(\mid G \mid)$ , $\pi(\mathbb{Z}_m) = \pi(m)$ , und $\pi(G \times H) = \pi(G) \cup \pi(H)$ ist.

2. Zu jeder Teilmenge $P \subseteq \Pi$ betrachte man die Untergruppe $A_P$ der additiven Gruppe $\mathbb{Q}$,
$$A_P := \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \ , \ n \in \mathbb{N} \ , \ n \text{ quadratfrei mit } \pi(n) \subseteq P \right\}.$$
   (a) Bestimme das Bild $\varphi(A_P)$, des durch Multiplikation mit $q = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}^*$ gegebenen Automorphismus $\varphi : \mathbb{Q} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbb{Q}$. Anschließend zeige man: Wenn $P, Q \subseteq \Pi$ mit endlicher symmetrischer Differenz, dann ist $A_P \cong A_Q$.

   (b) Zeige: Jeder Isomorphismus $\varphi : A_P \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow A_Q$ ist durch Multiplikation mit $q = \varphi(1)$ gegeben. Anschließend zeige man: $A_P \cong A_Q \Leftrightarrow \mid (P \cup Q) \setminus (P \cap Q) \mid < \infty$.

3. $Z(G)$ bezeichne das Zentrum der Gruppe $G$. Zeige oder widerlege

   (a) Wenn $G/Z(G)$ zyklisch ist, dann ist $G$ Abelsch.

   (b) Bestimme $Z\big(\mathrm{Isom}^+(\mathbb{E}^2)\big)$ , $Z\big(S0(2)\big)$ und $Z\left(\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{F}_p & \mathbb{F}_p \\ 0 & 1 & \mathbb{F}_p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri/

4. Zeige:

   (a) Wenn in einer Gruppe $G$ jedes Element $e \neq a \in G$ Ordnung 2 hat, dann ist $G$ Abelsch.

   (b) Zu jeder Primzahl $p > 2$ gibt es eine nicht-Abelsche Gruppe $G$ mit $\mid G \mid = p^3$, in der jedes Element $e \neq a \in G$ Ordnung $p$ hat.