Prof. Dr. R. Bieri WS 2006/2007

Frankfurt/M., den 01.11.2006

Einführung in Algebra und Zahlentheorie

Serie 4[1]

Abgabetermin: Montag, 20.11.2006, 8^{15} Uhr.

1. Man finde alle Homomorphismen
   (a) $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
   (b) $\varphi : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_q$ (p, q Primzahlen)
   (c) $\varphi : \mathbb{Z}_{p^m} \to \mathbb{Z}_{p^n}$ (p Primzahl $n, m \in \mathbb{Z}$))

2. Es sei $G = \begin{pmatrix} \mathbb{C}^* & \mathbb{C} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Betrachte die Abbildung $\varphi : G \to \mathbb{R}^*$, $\varphi(A) =\mid \det A \mid$.
   (a) Zeige: φ ist ein Homomorphismus; bestimme Kern und Bild.
   (b) Finde einen Isomorphismus $\ker\varphi \cong \mathrm{Isom}^+(\mathbb{E}^2)$. (Hint, $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ definiert eine Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto az + b$. Wann ist f eine Isometrie von $\mathbb{E}^2 = \mathbb{C}$?).

3. Finde alle Normalteiler der Quaternionengruppe $H = \{\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}\}$.

4. Wenn $\varphi, \psi : G \to H$ zwei Homomorphismen sind, dann bezeichnet man $D := \{a \in G \mid \varphi(a) = \psi(a)\}$ als den "Differenzkern". Zeige oder widerlege:
   (a) D ist eine Untergruppe von G.
   (b) D ist ein Normalteiler von G.

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri/