Prof. Dr. R. Bieri WS 2006/2007

Frankfurt/M., den 01.11.2006

Einführung in Algebra und Zahlentheorie

Serie 3[1]

Abgabetermin: Donnerstag, 09.11.2006, 8^{15} Uhr.

1. Es seien U, V Untergruppen einer Gruppe G.
   (a) Zeige, dass $UV = \{uv \mid u \in U, v \in V\}$ i. a. keine Untergruppe ist (Hint: $G = S_3$).
   (b) Zeige: $UV = VU \Leftrightarrow UV$ ist Untergruppe von G.
2. Sei $U, V \leq G$ wie oben, aber $\mid U \mid$ und $\mid V \mid$ endlich. Man betrachte die Abbildung $f : U \times V \to G$, $f(u, v) := uv$. Zeige, dass für jedes Element $a \in G, \mid f^{-1}(a) \mid = \mid U \cap V \mid$ ist, und beweise die Gleichung
$$\mid UV \mid = \mid U \mid \cdot \mid V \mid \big/ \mid U \cap V \mid .$$
3. In der additiven Gruppe $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ ($p =$ Primzahl) suche man nach Untergruppen.
   (a) Finde eine aufsteigende Kette von zyklischen Untergruppen, die $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ ausschöpft.
   (b) Zeige, dass jede echte Untergruppe zyklisch ist, aber $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ selber nicht.
4. Ein **Monoid** ist eine nicht-leere Menge M mit einer assoziativen Verknüpfung $M \times M \to M$ und einem 2−seitigen Neutralelement $e \in M$.
   (a) Klassifiziere die zyklischen Monoide.
   (b) Zeige: Ein endliches Monoid, das die Kürzungsregel erfüllt, ist eine Gruppe.

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri/