Prof. Dr. R. Bieri WS 2006/2007

Frankfurt/M., den 25.10.2006

Einführung in Algebra und Zahlentheorie
Serie 2[1]

Abgabetermin: Donnerstag, 02.11.2006, 8^{15} Uhr.

1. Beweise, dass aus dem Assoziativgesetz folgt, dass ein Produkt $x_1x_2\ldots x_m$ bei jeder Klammerung dasselbe Resultat liefert.

2. Es sei K ein Körper. Ist $a \in K$ vorgegeben, dann bezeichne $\begin{pmatrix} * & * \\ a & * \end{pmatrix}$ die Menge aller Matrizen der Form $\begin{pmatrix} x & y \\ a & z \end{pmatrix}$, $x, y, z \in K$.

   Welche der folgenden Matrizenmengen sind Untergruppen von $GL_2(K)$?

$$\begin{pmatrix} * & * \\ * & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & 1 \\ 0 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Quaternionengruppe. In $SL_2(\mathbb{C})$ betrachte man die 4 Matrizen

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

   Zeige: $H = \{\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}\}$ ist eine Untergruppe. Bestimme die Ordnung der Elemente und finde die Gruppentafel von H.

4. (a) Man suche alle Elemente der Ordnung 6 in $\mathbb{Z}_6$.
   (b) Gleiche Aufgabe in $\mathbb{Z}_5$, und $\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_{10}$.
   (c) Wieviele Elemente der Ordnung n gibt es in $\mathbb{Z}_n$?

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri/