

Einführung in Algebra und Zahlentheorie

Serie 13¹

Abgabetermin: Montag, 05.02.2007, 8¹⁵ Uhr.

1. Begründe, warum man weder das reguläre 7–Eck noch das reguläre 9–Eck, wohl aber das reguläre 5–Eck mit Zirkel und Lineal konstruieren kann.
[Anleitung: Man beweise — oder entnehme einem Lehrbuch — dass sich im 5–Eck Diagonale und Seite im Verhältnis des goldenen Schnitts teilen].
2. Für welche m, n ist der Körper \mathbb{F}_{p^m} isomorph zu einem Unterkörper von \mathbb{F}_{p^n} ?
[Anleitung: In der einen Richtung mit $|F_{p^n} : \mathbb{F}_{p^m}|$, in der anderen mit $\mathbb{Z}_{q-1} \leq \mathbb{Z}_{q^k-1}$ argumentieren.]
3. Es sei K ein Körper. Beweise die Äquivalenz der Aussagen:
 - (a) Jedes Polynom $f(X) \in K[X]$ vom Grad ≥ 1 hat in K eine Nullstelle.
 - (b) Jede echte Körpererweiterung $L \supsetneq K$ hat Grad $|L : K| = \infty$.
4. Dem Würfel W kann man ein Tetraeder $T \subseteq W$ einschreiben, dessen Ecken in den Würfecken liegen. Zeige, dass die Symmetriegruppe von W die von T als Untergruppe vom Index 2 enthält.
Bestimme alle Untergruppen vom Index 2 in $\text{Sym}(W)$ und entscheide, ob sie isomorph sind.

¹ auch als pdf-Datei im Internet unter: <http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri/>