Prof. Dr. R. Bieri WS 2006/2007

Frankfurt/M., den 12.01.2007

# Einführung in Algebra und Zahlentheorie

Serie 11[1]

Abgabetermin: Montag, 22.01.2007, $8^{15}$ Uhr.

1. Zeige, dass in faktoriellen Ringen jedes irreduzible Element ein Primelement ist.

2. (a) Bestimme die Einheiten von $\mathbb{Z}[[X]]$ und $\mathbb{Q}[[X]]$.
   (b) Suche alle Ideale von $\mathbb{Q}[[X]]$ (welche davon sind prim, welche maximal ?)
   (c) Beschreibe den Quotientenkörper von $\mathbb{Z}[[X]]$.

3. Es sei $R$ ein Integritätsbereich. Zeige: wenn $f(X) \in R[X]$ ein Monom $aX^m$ ($a \neq 0$) teilt, dann ist $f(X)$ selber ein Monom $f(X) = bX^k$. Verwende dies, um das Irreduzibilitätskriterium von Eisenstein für Polynome über einem faktoriellen Ring zu beweisen.

4. Man beweise die Irreduzibilität von $X^4 - X^2 + 1$ in $\mathbb{Z}[X]$. Wie steht es mit der Zerlegbarkeit in $\mathbb{Q}[X]$ oder in $\mathbb{Z}[i][X]$?

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri/