Prof. Dr. R. Bieri WS 2006/2007

Frankfurt/M., den 08.01.2007

Einführung in Algebra und Zahlentheorie

Serie 10[1]

Abgabetermin: Montag, 15.01.2007, 8^{15} Uhr.

1. Bestimme alle maximalen Ideale der Ringe

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R}\ ,\ \mathbb{R}[X]/(X^2)\ ,\ \mathbb{R}[X]/(X^2-3X+2)\ ,\ \mathbb{R}[X]/(X^2+X+1).$$

2. Es sei $\mathfrak{M}$ die Menge aller maximalen Ideale von $\mathbb{R}[X]$. Finde eine Bijektion

$$\mathfrak{M}\longleftrightarrow\{z\in\mathbb{C}\mid Im(z)\geq 0\}.$$

3. Es sei $R=\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$.

   (a) Bestimme die Einheiten von R und zeige, dass $2,3,1\pm\sqrt{-5}$ irreduzibel, aber nicht prim sind.

   (b) Zeige: in R ist jedes Element Produkt von irreduziblen, aber R ist kein faktorieller Ring.

4. Es sei R ein Hauptidealring, $a,b\in R$, nicht beide $=0$. Eine Element $m\in R$ heisst kleinstes gemeinsames Vielfaches (k. g. V.) von a und b, wenn gilt:

   (i) $a\mid m$ und $b\mid m$.

   (ii) aus $r\in R$ mit $a\mid r$ und $b\mid r$ folgt $m\mid r$.

   (a) Zeige: im Hauptidealring R existiert ein solches k.g.V $m=[a,b]$ und ist bis auf Assoziiertheit eindeutig bestimmt.

   (b) $(a,b)\cdot[a,b]$ ist zu ab assoziiert, $(a,b)=$ g.g.T von a und b.

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri/