Prof. Dr. R. Bieri SS 2007

Frankfurt/M., den 22.06.2007

Algebra II

Serie 9[1]

Abgabetermin: Montag, 02.07.2007, 8^{15} Uhr.

1. Es sei $L \supseteq K$ eine endliche Körpererweiterung.

   (a) Betrachte eine Einbettung $\tau : K \rightarrowtail M$ in einen algebraisch abgeschlossenen Körper und setze $m =$ Anzahl der Fortsetzungen $\sigma : L \rightarrowtail M$ von τ auf L. Zeige $m \leq \mid L : K \mid$ und aus $m = \mid L : K \mid$ folgt L separabel über K.

   (b) Verwende (a) um zu zeigen:
   Sind $L \supseteq L'$ und $L' \supseteq K$ separable (endliche) Körpererweiterungen, dann ist auch $L \supseteq K$ separabel.

2. Es sei K ein Körper mit Charakteristik $p > 0$ und $L \supseteq K$ ein endlicher Erweiterungskörper.

   (a) Zeige: Wenn $p \nmid \mid L : K \mid$, dann ist L separabel über K.

   (b) L enthält einen eindeutig bestimmten maximalen separablen Unterkörper $K \subseteq K_s \subseteq L$. L ist rein inseparabel über K_s (d.h. jedes $\alpha \in L \setminus K_s$ inseparabel, und $\mid L : K_s \mid = p^e$.

3. Bestimme primitive Elemente für die Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ über $\mathbb{Q}$ $(a, b \in \mathbb{Q})$.

4. Zeige $\mathbb{Q}(i\sqrt{5})$ ist normal über $\mathbb{Q}$; und $\mathbb{Q}\big((1+i)\sqrt[4]{5}\big)$ ist normal über $\mathbb{Q}(i\sqrt{5})$; aber $\mathbb{Q}\big((1+i)\sqrt[4]{5}\big)$ ist nicht normal über $\mathbb{Q}$.

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri/