BIERI SS07

Algebra II

Serie 7

1. Finde die Charaktertafeln der nicht-Abelschen Gruppen der Ordnung 8. (Hint: Die Quaternionengruppe lässt sich als die Untergruppe von $SL_2(\mathbb{C})$ der Matrizen $\pm\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\pm\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}$, $\pm\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, $\pm\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}$ beschreiben).

2. Es sei K ein endlicher Körper und $G=\{\alpha_{a,b} \mid a,b\in K, a\neq 0\}$ die Gruppe aller Abbildungen $\alpha_{a,b}: K\to K$, $\alpha_{a,b}(x)=ax+b$.

(a) Bestimme $|G/G'|$.

(b) G permutiert die Basis des Vektorraumes $V=\mathbb{C}[K]$. Bestimme den Charakter $\chi: G\to\mathbb{C}$ dieser Darstellung.

(c) Zerlege χ in irreduzible Charaktere

(d) Zeige: G besitzt genau eine irreduzible Darst. vom Grad >1.

3. Zunächst sei G eine beliebige endliche Gruppe und $G'\leq G$ die Kommutatoruntergruppe. Zeige, dass jede Nebenklasse xG' die (disjunkte) Vereinigung von Konjugationsklassen ist. Verwende diese Beobachtung, um Folgendes zu zeigen: Wenn G genau eine irreduzible Darstellung vom Grad $d>1$ besitzt, dann gilt

(a) Die Klassenzahl $k(G)$ ist gleich $|G/G'|+1$.

(b) Alle Elemente von G' sind in G konjugiert zueinander

(c) $G'\cong(\mathbb{Z}_p)^m$ für eine Primzahl p

(d) Wenn das Zentrum $Z(G)\neq e$ ist, dann ist $Z(G)=G'\cong\mathbb{Z}_2$ und $x^2\in Z(G)$ für alle $x\in G$. Ferner $|G/G'|=2^{2d+1}$

Wenn $Z(G)=e$ ist, dann ist $|G/G'|=|G'|-1$, also $|G|\geq p^m(p^m-1)$.

Abgabe: (2 von 3) Mo 18.6.07