Bieri

SS 07

Algebra II

Serie 4

1. Bestimme die Kompositionsfaktoren
(a) Der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}_m$.
(b) Der Isometriegruppen der regulären Polyeder
(c) von $\Lambda = \mathbb{M}_n(K)$ als Linksmodul über sich (K = Körper).

2. Eine Untergruppe $U \leq G$ heisst subnormal, wenn durch U eine Normalreihe von G geht.
Zeige, dass in einer endlichen p-Gruppe jede Untergruppe subnormal ist.

3. Eine Gruppe G heisst polyzyklisch, wenn sie eine Normalreihe mit lauter zyklischen Faktoren hat.
Zeige: Ist G polyzyklisch, dann sind auch alle Untergruppen und alle Faktorgruppen von G polyzyklisch.

4. Zeige, dass die folgenden zwei Aussagen äquivalent sind
(i) "Jede endliche nicht-abelsche einfache Gruppe enthält ein Element der Ordnung 2".
(ii) "Jede endliche Gruppe mit ungerader Ordnung ist auflösbar"

Anmerkung: Der berühmte Satz von Feit-Thompson besagt, dass die beiden Aussagen nicht nur äquivalent sondern auch wahr sind! Die Existenz eines Elementes der Ordnung 2 ist der Ausgangspunkt der Klassifikation aller endlichen einfachen Gruppen, die in den 80er Jahren vollendet wurde.