Prof. Dr. R. Bieri SS 2007

Frankfurt/M., den 27.04.2007

Algebra II

Serie 2[1]

Abgabetermin: Montag, 07.05.2007, 8^{15} Uhr.

1. Es sei A ein Modul über dem Integritätsbereich R. Zu jedem Untermodul $B \leq A$ definiert man den **Isolator** von B ind A als

$$\tilde{B} := \{a \in A \mid \text{Es gibt ein } 0 \neq r \in R \text{ mit } ra \in B\}$$

   Zeige: $\tilde{B}$ ist ein Untermodul von A und $A/\tilde{B}$ ist torsionsfrei.

2. Es sei R der Ring $\mathbb{Z}[X]$. Suche einfache Beschreibungen der durch die Relationenmatrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & X & X \\ X & 1 & X \\ X & X & 1 \end{pmatrix}$$

   gegebenen $R-$Moduln.

3. Es sei $R = K[X]$ der Polynomring über einem Körper, und V ein $K[X]-$Modul mit $\dim_K V = n < \infty$. Der durch Multiplikation mit X gegebene Endomorphismus $\varphi : V \to V$ sei bez. eines Basis $v_1, \ldots, v_n \in V$ durch $A \in \mathbb{M}_n(K)$ beschrieben.* Zeige: $E_n X - A \in \mathbb{M}_n(K[X])$ ist eine Präsentierungsmatrix von V.

   * d.h. $\varphi(v) = vA$.

4. **Ein nicht-Noetherscher Unterring von $\mathbb{Q}[\mathbf{X}^{\pm 1}, \mathbf{Y}^{\pm 1}]$**
   Es sei $v : \mathbb{Q}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}] \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ die durch

$$v(\Sigma a_{ij} X^i Y^j) := \min\{i + j\sqrt{2} \mid a_{ij} \neq 0\}$$

   definierte Abbildung, wobei $v(0) = \infty$ zu interpretieren ist.

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri/

(a) Man zeige $v(f+g) \geq \min\big(v(f), v(g)\big)$ und $v(f \cdot g) = v(f) + v(g)$ für alle $f, g \in \mathbb{Q}[X,Y]$.

(b) Es sei $R = \{f \in \mathbb{Q}[X,Y] \mid v(f) \geq 0\}$. Zeige R ist ein Unterring von $\mathbb{Q}[X,Y]$ und für jede Zahl $\varepsilon \geq 0$ ist $M_\varepsilon := \{f \in R \mid v(f) > \varepsilon\}$ ein Ideal von R.

(c) Zeige: $M_0 \leq R$ ist ein maximales Ideal von R, und ist nicht endlich erzeugt als $R-$Modul.