Prof. Dr. R. Bieri SS 2007

Frankfurt/M., den 20.04.2007

Algebra II

Serie 1[1]

Abgabetermin: Montag, 30.04.2007, 8^{15} Uhr.

1. Es sei Λ ein Ring mit $1, (A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Torsionsmoduln über Λ. Sind dann die direkte Summe $\bigoplus_I A_i$ und das direkte Produkt $\prod_I A_i$ auch Torsionsmoduln ?

2. Es sei I eine bel. Indexmenge und $B_i \leq A_i (i \in I)$ Untermoduln. Zeige $\bigoplus_I B_i \leq \bigoplus_I A_i$ und $\prod_I B_i \leq \prod_I A_i$ sind Untermoduln, und es gibt Isomorphismen
$$\begin{aligned} (\bigoplus_I A_i)/(\bigoplus_I B_i) &\cong \bigoplus_I (A_i/B_i) \\ (\prod_I A_i)/(\prod_I B_i) &\cong \prod_I (A_i/B_i). \end{aligned}$$

3. Es sei $\Lambda = \mathbb{M}_n(K)$ der Matrizenring über einem Körper K und V der $\Lambda-$Modul K^n.
   (a) Bestimme alle Untermoduln von V.
   (b) Sei $M \in \mathbb{M}_n(K)$ gegeben. Man beschreibe das von M erzeugte Linksideal ΛM^*. Für welche M ist ΛM ein minimales Linksideal $\neq 0$?
   (c) Sind alle Linksideale von Λ zyklisch ?

   *Hint. Versuche es zunächst mit $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

4. Es sei V ein reeller Vektorraum mit einer abzählbar unendlichen Basis $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots,$ $\Lambda = \mathrm{End}(V)$.
   (a) Welche unendlichen Matrizen beschreiben die Elemente von Λ?
   (b) Man beschreibe, wie die Matrix von $\lambda\mu$ aus den Matrizen von λ und μ berechnet werden kann.

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri/

(c) Man gebe die Matrizen der folgenden Endomorphismen $\varphi, \varphi' \in \Lambda$ an.
$\varphi(v_{2n}) = v_n$, $\varphi(v_{2n-1}) = 0$, $\varphi'(v_{2n}) = 0$, $\varphi'(v_{2n-1}) = v_n$.

(d) Zeige: Wenn man Λ als Linksmodul über Λ auffasst, ist $\{\varphi, \varphi'\}$ eine Basis von Λ.

(e) Zeige: als $\Lambda-$Moduln sind alle Λ^n , $n = 1, 2, 3, \ldots$ isomorph.