Prof. Dr. R. Bieri SS 2003

Frankfurt/M., den 11.6.2003

Algebra II
Serie 8[1]

Abgabetermin: Montag, 23.6.2003

1. Es sei W die Drehgruppe des Würfels. Bestimme den Charakter der natürlichen Darstellung $\varrho : W \to SO_3$.

2. Die Quarterionengruppe $Q = \{\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}\}$ kann man als eine Gruppe von 2×2-Matrizen

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \; \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

auffassen. Bestimme die Charaktertafel von Q und vergleiche sie mit derjenigen von D_4.

3. Es sei G eine endliche Gruppe, die eine einzige irreduzible Darstellung vom Grad $d > 1$ hat. Zeige

   (a) die Konjugationsklassen von G sind $\{1\}, \; G' - 1, \; x_1G', \; \ldots, \; x_lG' \quad x_i \notin G'$

   (b) $G' \cong \mathbb{Z}_p^m \quad (p = \text{Primzahl})$[2]; insbesondere ist G auflösbar

   (c) $\mid G \mid = p^m(p^m - 1)q^2$

4. Es sei G die Gruppe aller affinen Bijektionen $\alpha : \mathbb{F}_{p^m} \to \mathbb{F}_{p^m} \quad \alpha(x) = ax + b \quad (a, b \in \mathbb{F}_{p^m}, \; a \neq 0)$.

   (a) Man bestimme die Konjugationsklassen von G sowie G/G'.

   (b) Bestimme den Charakter der Darstellung, die G auf $V = \mathbb{C}[\mathbb{F}_{p^m}]$ bewirkt.

   (c) Zeige: G besitzt genau eine irreduzible Darstellung vom Grad > 1.

---

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri

[2] Hint: konjugierte Elemente haben dieselbe Ordnung