Prof. Dr. R. Bieri SS 2003

Frankfurt/M., den 2.5.2003

Algebra II

Serie 2[1]

Abgabetermin: Montag, 12.5.2003

1. Über dem Körper K betrachte man einen Vektorraum V mit abzählbarer Basis $v_1, v_2, v_3, \ldots$ und seinen Endomorphismenring Λ.
   (a) Man finde einen zu Λ isomorphen Ring, dessen Elemente „unendliche Matrizen“ sind (Vorsicht bei der Multiplikation unendlicher Matrizen!)
   (b) Man finde einen links$-\Lambda-$Modul Isomorphismus $\Lambda \oplus \Lambda \cong \Lambda$.$\big($ Hint: unendliche Matrizen als Spaltenfolgen auffassen, $A = (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots)$ $B = (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots)$ und zu $\varphi(A, B) = (\underline{a}_1, \underline{b}_1, \underline{a}_2, \underline{b}_2, \ldots)$ mischen $\big)$.
2. Es sei A ein Modul über einem Integritätsbereich R. Zu jedem Untermodul $U \leq A$ betrachtet man den **Isolator** $\tilde{U} = \{a \in A \mid \exists 0 \neq r \in R$ mit $ra \in U\}$. Zeige: $\tilde{U}$ ist ein Untermodul und $A/\tilde{U}$ ist torsionsfrei.
3. Bestimme die Torsionsuntergruppen von $\bigoplus\limits_{p \in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\prod\limits_{p \in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ und $(\prod\limits_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})/(\bigoplus\limits_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, wobei $P = \{\text{Primzahlen} > 0\}$. Analoge Fragen für ganz $\mathbb{N}$ anstelle von P.
4. Es sei R ein kommutativer Ring mit 1. Zeige: ein Linksideal $L \leq R$ ist genau dann als $R-$Modul frei, wenn L ein Hauptideal, erzeugt von einem nicht-Nullteiler ist.

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri