Prof. Dr. R. Bieri SS 2003

Frankfurt/M., den 27.6.2003

Algebra II

Serie 10[1]

Abgabetermin: Montag, 7.7.2003

1. Es seien $\rho_i : G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V_i)$, $i = 1, 2$, zwei Darstellungen einer Gruppe G und $\chi_i : G \to \mathbb{C}$ deren Charaktere. Das Tensorprodukt $V = V_1 \otimes_{\mathbb{C}} V_2$ über $\mathbb{C}$ mit der diagonalen $G-$Operation $g(v_1 \otimes v_2) := gv_1 \otimes gv_2 (g \in G,\ v_i \in V_i)$ liefert die Tensorproduktdarstellung $\rho_1 \otimes \rho_2 :\ G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$. Zeige: der Charakter von $\rho_1 \otimes \rho_2$ ist gleich $\chi_1 \cdot \chi_2$.

2. Zeige:

   (a) -Id ist das einzige Element der Ordnung 2 in $SU(2)$.

   (b) Nicht-Abelsche einfache Gruppen haben keine irreduzible Darstellung vom Grad 2.

3. **Def.** Eine **kristallographische Gruppe** ist eine Untergruppe $G \leq SO(3)$ mit der Eigenschaft, dass G ein ganzzahliges Gitter $\Gamma = \mathbb{Z}v_1 \oplus \mathbb{Z}v_2 \oplus \mathbb{Z}v_3 \leq \mathbb{R}^3$ invariant lässt $\big($ das hat zur Folge, dass jede Matrix $A \in G$ zu einer ganzzahligen Matrix konjugiert ist; also gilt $\chi(A) = \mathrm{Spur}(A) \in \mathbb{Z}\big)$.

   Es sei $G \leq SO(3)$ eine endliche kristallographische Gruppe. Zeige

   (a) $\chi(G) = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$; $\chi(A) = 3 \Leftrightarrow A = \mathrm{Id}$.

   (b) $\frac{1}{|G|} \sum\limits_{g \in G} \chi(g)^m \in \mathbb{Z}$, alle $m \in \mathbb{N}_0$.

   (c) $\frac{1}{|G|} \sum\limits_{g \in G} f\big(\chi(g)\big) \in \mathbb{Z}$, für jedes $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$.

   Angewendet auf $f(X) = (X + 1)\dot{X}(X - 1)(X - 2)$ folgt daraus

$$| \, G \, | \ \text{ ist Teiler von } 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri