Prof. Dr. R. Bieri WS 2002/2003

Frankfurt/M., den 6.12.2002

Algebra I

Serie 9[1]

Abgabetermin: Montag, 16.12.2002, 8^{15} Uhr.

1. Zeige: Es gibt nicht-kommutative Gruppen der Ordnung 224, aber keine davon ist einfach.

2. Es sei $\mathrm{Hom}(A, G)$ die Menge aller Homomorphismen $\varphi : A \to G$ und $k(G)$ die Zahl der Konjugationsklassen der endlichen Gruppe G. Beweise:

$$\begin{aligned} \mid \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G) \mid \; &= \; \mid G \mid \\ \mid \mathrm{Hom}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, G) \mid \; &= \; \mid G \mid \cdot k(G) \end{aligned}$$

   (Hint.: $\mid G : C(a) \mid =$ Zahl der zu $a \in G$ konjugierten Elemente verwenden.)

3. Es sei $\wedge = \mathbb{M}_n(K)$ der Ring aller $n-$reihigen Matrizen über dem Körper K. Es sei e_{ij} die Matrix $e_{ij} = (a_{ke})$ mit $a_{ke} = S_{ki}S_{lj}$.
   (a) Beschreibe das Linksideal $\wedge e_{ij} \leq \wedge$.
   (b) Beschreibe das Linksideal $\wedge \mu \leq \wedge$ für eine beliebige Matrix $\mu \in \wedge$. (Hint.: $e_{ij}\mu \in \wedge\mu$ verwenden.)
   (c) Zeige: Zu jedem Linksideal $L \leq \wedge$ gibt es ein $\mu \in L$ mit $L = \wedge\mu$.

4. Es sei $\wedge$ wie in 3. Zeige: 0 und $\wedge$ sind die einzigen 2-seitigen Ideale in $\wedge$. ($\wedge$ ist ein „einfacher Ring“).

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri