Prof. Dr. R. Bieri WS 2002/2003

Frankfurt/M., den 29.11.2002

**Algebra I**
Serie 8[1]

Abgabetermin: Montag, 9.12.2002, $8^{15}$ Uhr.

1. Es sei $G = \mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4$ das nicht-Abelsche semidirekte Produkt von $\mathbb{Z}_3$ mit $\mathbb{Z}_4$. Bestimme die Ordnungen der Elemente von $G$ und zeige, dass $G \not\cong A_4$ ist.

2. Es sei $G$ eine endliche Gruppe und $P \leq G$ eine Sylow$-p-$Untergruppe. Zeige: Der Normalisator von $P$ in $G$ ist selbstnormalisierend: $N_G\big(N_G(P)\big) = N_G(P)$.
(Hint.: $P$ ist auch Sylow-UG von $N_G(P)$ und $P \lhd N_G(P)$.)

3. Es sei $G$ eine einfache Gruppe mit $\mid G \mid = 60$. Man zeige Schritt für Schritt die folgenden Aussagen:

   (a) $G$ hat keine UG vom Index $<5$.

   (b) Für die Zahl $t_p$ der Sylow$-p-$UG gilt $t_5 = 6,\ t_3 = 10$.

   (c) $G$ enthält genau 24 Elemente der Ordnung 5 und 20 Elemente der Ordung 3.

   (d) $G$ enthält höchstens 15 Elemente der Ordnung 2.

4. Es sei $G$ wie in Aufgabe 3. Zeige:

   (a) Die Sylow$-2-$Unterguppe von $G$ ist Abelsch.

   (b) Wenn $x \in G$ Ordnung 2 hat und im Durchschnitt von zwei Sylow$-2-$Untergruppen liegt, dann hat der Zentralisator $C(x)$ die Ordnung $\mid C(x) \mid \geq 12$.

   (c) Wenn der Durchschnitt von 2 verschiedenen Sylow$-2-$Untergruppen stets trivial ist, dann ist $t_2 = 5$. (Hint.: 3d verwenden.)

   (d) $G \cong A_5$.

---
[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri