Prof. Dr. R. Bieri WS 2002/2003

Frankfurt/M., den 21.11.2002

Algebra I

Serie 7[1]

Abgabetermin: Montag, 2.12.2002, 8^{15} Uhr.

1. Es sei G eine endliche Gruppe. In G betrachte man eine Untergruppe $U \leq G$ mit der Eigenschaft, dass die zu U konjugierten Untergruppen ganz G überdecken: $G = \bigcup_g gUg^{-1}$.
   Zeige: das geht nur, wenn $U = G$ ist.
   (Hint.: G operiert auf der Menge der Untergruppen. Bestimme die Zahl der zu U konjugierten und schätze $\mid \bigcup_g gUg^{-1} \mid$ ab).

2. Zeige: Jede $p-$Gruppe $G \neq e$ ($p =$ Primzahl), besitzt einen Normalteiler $N \lhd G$ mit $G/N \cong \mathbb{Z}_p$.
   (Hint.: Induktion nach $\mid G \mid = p^n$ unter Verwendung von $Z(G) \neq e$ und dem Korrespondenzsatz).

3. Zeige: Ist G eine Gruppe mit trivialem Zentrum $Z(G) = e$, dann kann man G als Normalteiler in Aut (G) auffassen und $Z\big(\mathrm{Aut}(G)\big) = e$.

4. Es sei G die Isometriegruppe des Dodekaeders $\triangle$. Finde einen Homomorphismus $\varphi : G \to S_5$ (**Anleitung:** mit Pappe und Kleber oder mit Trinkhalmen und Bindfaden ein Modell von $\triangle$ basteln.[2] Sich davon überzeugen, dass die Diagonalen der Seitenflächen die Kanten von 5 $\triangle$ eingeschriebenen Würfeln sind. G permutiert diese Würfel). Bestimme Kern und Bild von φ und zeige, dass φ die orientierungserhaltende Untergruppe $G_0 \leq G$ isomorph auf A_5 abbildet. Zeige: $G \ncong S_5$.

---

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri

[2] dafür gibt es Schein-relevante Punkte!