Prof. Dr. R. Bieri WS 2002/2003

Frankfurt/M., den 15.11.2002

Algebra I
Serie 6[1]

Abgabetermin: Montag, 25.11.2002, 8^{15} Uhr.

1. (a) Man finde einen surjektiven Homomorphismus $\varphi : D_\infty \twoheadrightarrow D_n$, bestimme den Kern und wende den 1. Isomorphiesatz an (D_∞ = Symmetriegruppe von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{E}^1$).

   (b) Verwende a und den 3. Isomorphiesatz, um in D_{mn} einen Normalteiler $A \cong \mathbb{Z}_n$ zu finden mit $D_{mn}/A \cong D_m$.

2. Es sei Z das Zentrum der Gruppe G. Zeige: Ist G/Z zyklisch, dann ist G Abelsch.

3. Es sei G die volle Symmetriegruppe des Würfels und $G_0 \leq G$ die Gruppe der orientierungserhaltenden Isometrien. Finde einen Homomorphismus $\varphi : G \twoheadrightarrow S_4$ (Diagonalen permutieren) und einen Homomorphismus $\psi : G \twoheadrightarrow S_3$ (Paare von Seitenmitten). Zeige $G_0 \cong S_4$ und $\ker\psi \cong V$ (Kleinsche 4−er Gruppe).

4. Es sei p eine Primzahl, $\mathbb{Z}(p^\infty) := \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]/\mathbb{Z}$ (additive Schreibweise). Zeige:

   (a) die zyklischen Untergruppen $A_m := \mathrm{gp}(\frac{1}{p^m} + \mathbb{Z})$ dieser Gruppe $\mathbb{Z}(p^\infty)$ haben $p-$Potenz-Ordnung und bilden eine aufsteigende Kette

$$0 = A_1 < A_2 < A_3 < \cdots < A_m < \cdots$$

$$\text{und} \quad \mathbb{Z}(p^\infty) = \bigcup_m^\infty A_m.$$

   (b) $\mathbb{Z}(p^\infty)$ enthält keine weiteren Untergruppen!

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri