Prof. Dr. R. Bieri WS 2002/2003

Frankfurt/M., den 31.1.2003

Algebra I

Serie 14 (letzte Serie)[1]

Abgabetermin: Montag, 10.2.2003, 8^{15} Uhr.

1. Im Körper $K := \mathbb{F}_p(t)$ der rationalen Funktionen über dem Primkörper $\mathbb{F}_p$ betrachte man das Bild $K_0 \subseteq K$ des Frobenius-Endomorphismus $\phi : K \rightarrowtail K$. Man finde ein Element $\alpha \in K$ mit $K = K_0(\alpha)$, zeige, dass α algebraisch ist über K_0 und bestimme das Minimalpolynom $f(X) \in K_0[X]$.

2. Es sei K ein Körper, $f(X)$ ein Polynom über K und $f'(X)$ seine formale Ableitung. Man zeige:
   Wenn K Charakteristik 0 hat oder ein endlicher Körper ist, dann gilt: wenn $g(X)$ ein irreduzibler gemeinsamer Teiler von $f(X)$ und $f'(X)$ ist, dann ist $g(X)^2$ ein Teiler von $f(X)$. (Für $K = \mathbb{F}_p(t)$ finde man ein Gegenbeispiel zu dieser Aussage).

3. Man zerlege $X^9 - X$ und $X^{27} - X$ über $\mathbb{F}_3$ in irreduzible Faktoren.

4. (a) Es seien p, q zwei Primzahlen. Finde eine Formel für die Zahl der normierten irreduziblen Polynome vom Grad q^k in $\mathbb{F}_p[X]$.

   (b) Wieviele normierte irreduzible Polynome vom Grad 15 gibt es in $\mathbb{F}_2[X]$?

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri