Prof. Dr. R. Bieri WS 2002/2003

Frankfurt/M., den 24.1.2003

Algebra I

Serie 13[1]

Abgabetermin: Montag, 3.2.2003, 8^{15} Uhr.

1. Es sei $K \subseteq \mathbb{C}$ ein Zahlkörper mit der Eigenschaft, dass $f(X) = X^3 - 3X + 4$ über K irreduzibel ist (gibt es das?). Es sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $f(X)$. Man gebe das Inverse $\alpha^{-1} \in K(\alpha)$ explizit in der Form $\alpha^{-1} = a + b\alpha + c\alpha^2$, $a, b, c \in K$ an.

2. Zeige: Für jede quadratfreie positive Zahl $a \in \mathbb{Q}$ gilt $\mid \mathbb{Q}(\sqrt[4]{a}) : \mathbb{Q} \mid = 4$.

3. Man entscheide jeweils, ob $i \in \mathbb{C}$ im Körper (a) $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$, (b) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{-2})$, (c) $\mathbb{Q}(\alpha)$, mit $\alpha^3 + \alpha + 1 = 0$, enthalten ist.

4. Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ vom Grad m, bzw. n über $\mathbb{Q}$. Zeige: Wenn m und n teilerfremd sind, dann ist $\mid \mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q} \mid = mn$. Welche Werte kann $\mid \mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q} \mid$ annehmen, wenn $m = n = 3$ ist?

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri