Prof. Dr. R. Bieri　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　WS 2002/2003

Frankfurt/M., den 10.1.2003

Algebra I

Serie 11[1]

Abgabetermin: Montag, 20.1.2003, 8^{15} Uhr.

1. Zeige: Der Faktorring $\mathbb{R}[X,Y] \,/\, \mathbb{R}[X,Y](XY-1)$ ist isomorph zum Ring $\mathbb{R}[X,X^{-1}]$ aller formalen Laurent-Polynome $f(X) = \underset{i=-\infty}{\overset{\infty}{Z}} a_i X^i \;\; (a_i = 0$, fast alle $i)$ über $\mathbb{R}$.

2. (a) Im Potenzreihenring $K\big[[X]\big]$ bestimme man die Einheiten und die Primelemente, und für eine explizite Reihe $f(X) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ die Primfaktorzerlegung in $K\big[[X]\big]$.

   (b) Bilden auch die formalen Laurent-Reihen $\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i X^i (a_i = 0$ für fast alle negativen $i)$ einen Ring? Wenn ja — ist dieser faktoriell?

3. Es sei R der Polynomring $K[X,Y]$ über dem Körper K. Der **Träger** von $f(X,Y) = \sum a_{ij} X^i X^j$ ist die Menge $\operatorname{supp}(f) := \{(i,j) \in \mathbb{N}_0^2 \mid a_{ij} \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Was kann man über $\operatorname{supp}(f)$ sagen, wenn

   (a) $f(X,Y)$ die Variable X nicht enthält.

   (b) $f(X,Y) = g(Z)$, mit $g \in K[Z]$ und $Z = X^r Y^s$.

   (c) $f(X,Y) = X^r Y^s h(X,Y)$, $h \in R$.

4. Es sei R wie oben. Der Träger eines Ideals $I \leq R$ ist definiert als $\operatorname{supp}(I) := \bigcup_{f \in I} \operatorname{supp}(f)$. Bestimme $\operatorname{supp}(I)$ für

   (a) $I = RX^r Y^s$

   (b) $I =$ beliebiges Hauptideal

   (c) I von Monomen $aX^r Y^s$ erzeugt.

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri