Prof. Dr. R. Bieri WS 2002/2003

Frankfurt/M., den 13.12.2002

Algebra I

Serie 10[1]

Abgabetermin: Montag, 13.1.2003, 8^{15} Uhr.

1. Zeige, dass $\mathbb{Z}(\sqrt{-2}) = \{m + n\sqrt{2}i \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ ein Euklidischer Ring ist und bestimme seine Einheiten. Bestimme mindestens 10 wesentlich verschiedene Primelemente. (Hint.: Zunächst zeigen, dass jede Primzahl $p \in \mathbb{N}$ entweder in $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ prim ist oder das Produkt von zwei konjugiert-komplexen Primelementen).

2. Bestimme die Einheiten und die Ideale des Rings der formalen Potenzreihen $K[[X]]$ über einem Körper K. Welche Ideale sind prim, welche sind maximal?

3. Formuliere und beweise den Korrespondenzsatz für Ideale eines Faktorrings R/I. Zeige, dass die Korrespondenz Maximalität und Primalität von Idealen respektiert.

4. Es sei R ein Integritätsbereich, $a, b \in R$ zwei Elemente von R, nicht beide gleich Null. Ein Element $c \in R$ heisst **kleinstes gemeinsames Vielfaches von** a **und** b $\big(\mathrm{kgV}(a,b)\big)$, wenn gilt

   i) $a \mid c$ und $b \mid c$

   ii) $a \mid x$ und $b \mid x \Rightarrow x \mid c$

   A) Zeige: Wenn R ein Hauptidealring ist, dann existiert ein kgV und ist bis auf Multiplikation mit einer Einheit eindeutig bestimmt.

   B) $\mathrm{ggT}(a,b)\cdot\ \mathrm{kgV}(a,b) = ab$.

5. (fakultativ) Suche nach maximalen Idealen in $\mathbb{Z}[X]$.

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri