Prof.Dr.R.Bieri SS 04

Klausur in Mathematik II (Geometrie)

I. Euklidische Geometrie

1. Gegeben sei ein Dreieck $\triangle_{ABC}$. Man konstruiere mit $Z + L$ den Inkreis von $\triangle_{ABC}$ (Mittelpunkt und Berührungspunkte mit den Seiten — wie immer mit Konstruktionsbeschreibung!).

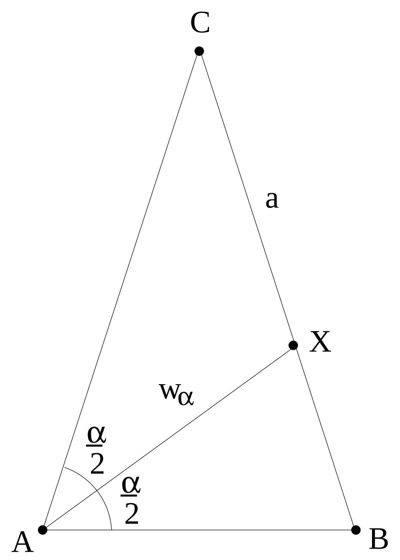
2. In der Ebene $\mathbb{E}^2$ sind die Punkte A, B, H gegeben derart, dass die Winkel $\measuredangle HAB$ und $\measuredangle HBA$ spitz sind. Konstruiere mit $Z + L$ den Punkt $C \in \mathbb{E}^2$, so dass H der Höhenschnittpunkt von $\triangle_{ABC}$ ist (wie immer mit Konstruktionsbeschreibung!).

3. Berechne den Inkreisradius eines gleichschenkligen Dreiecks mit Basislänge a und Schenkellänge b.

4. In einem gleichschenkligen Dreieck $\triangle_{ABC}$ mit Basiswinkel $\alpha = \beta = 72^o$ treffe die Winkelhalbierende w_α die gegenüberliegende Seite a im Punkt X.

   (a) Die Strecken AB, AX und XC sind alle gleich lang.

   (b) X teilt BC im Verhältnis des goldenen Schnittes.



II. Abbildungsgeometrie

5. (a) Zeige: Jede Isometrie $\alpha : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ hat einen Fixpunkt oder eine invariante Gerade (d.h. eine Gerade g mit $\alpha(g) = g$).

   (b) Welche Isometrien haben beides, Fixpunkte und invariante Geraden?

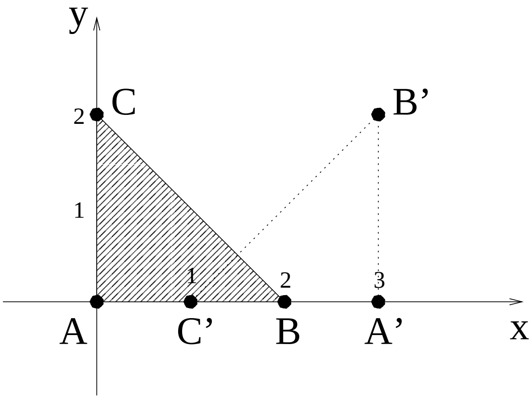
6. Zeige: Wenn ein Sehnenviereck (d.h. ein 4-Eck mit Umkreis) zwei parallele Seiten hat, dann besitzt es mindestens eine Spiegelsymmetrie.

7. Gegeben sind die Punkte $A(0,0), B(2,0), C(0,2)$ und $A'(3,0), B'(3,2), C'(1,0)$. Gesucht ist eine Isometrie $\alpha : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ mit $\alpha(A) = A', \alpha(B) = B', \alpha(C) = C'$.

   (a) Begründe, warum es eine solche Isometrie α gibt.

   (b) Beschreibe α in Worten.

   (c) Bestimme $\alpha(P)$ für $P(1, -1)$.

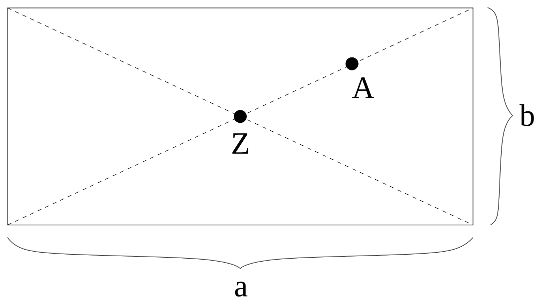


8. Mitten **auf** einem rechteckigen Tisch mit Seitenlängen $a > b$ steht eine offene Zuckerdose Z. **Auf der Unterseite** des Tisches krabbelt eine Ameise A — im Moment ist sie genau in der Mitte zwischen der Tischmitte und einer Ecke.

   (a) Konstruiere den Weg, den sie gehen muss, um möglichst bald an die Zuckerdose zu kommen.

(b) Wie lang ist der Weg, den sie zurücklegen muss?

[Hint. Spiegelung verwenden]



III. Rechnerische Methoden

9. (a) Bestimme den exakten Wert von $\sin 30^o$ und $\cos 30^o$ (ohne Taschenrechner!). [Hint: Verwende ein gleichseitiges Dreieck]

   (b) Bestimme den exakten Wert von $\sin 15^o$ und $\cos 15^o$ (ohne Taschenrechner!) mit Hilfe der Additionstheoreme

   $$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \quad ; \quad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

   und der unter (a) gefundenen Werte.

10. In einem Dreieck mit Seiten $a = \sqrt{5}, b = 2$ und dem Winkel $\alpha = 60^o$ berechne man die Länge der dritten Seite. Ist diese Länge eindeutig bestimmt?

11. Beschreibe die Ebene

$$E = \left\{ \underline{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| r, s \in \mathbb{R} \right\}$$

durch eine Koordinatengleichung $ax + by + cz = d$.

12. Es sei $E \subseteq \mathbb{E}^3$ gegeben durch die Koordinatengleichung $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \ x + 2y + 3z = 4 \right\}$.

Bestimme die Gerade g senkrecht zu E durch $P(2,1,1)$ und den Durchstosspunkt $g \cap E$.