Prof. Dr. R. Bieri WS 2004/2005

Frankfurt/M., den 15.11.2004

Mathematik I (Zahlbereiche)

Ausgewählte Musterlösungen[1]

Lösung von Aufgabe 4.b aus Serie 1

$$\begin{aligned}\text{Gegeben: } A_0 &= \emptyset \\ A_n &= A_{n-1} \cup \{A_{n-1}\} \qquad (n = 1, 2, \dots)\end{aligned}$$

Damit ist bekannt, wie $A_1, A_2, \dots$ aussehen.

$$\begin{aligned}A_1 = A_0 \cup \{A_0\} &= \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} \\ A_2 = A_1 \cup \{A_1\} &= \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\emptyset, A_1\} \\ A_3 = A_2 \cup \{A_2\} &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\ &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\ &= \{A_0, A_1, A_2\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_\infty := \bigcup_{n-1}^{\infty} A_n &= \{A_0\} \cup \{A_1\} \cup \{A_2\} \cup \dots \cup \{A_n\} \cup \dots \\ &= \{A_0, A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots\}\end{aligned}$$

Gesucht ist eine bijektive Abbildung $f : A_\infty \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbb{N}$.

Setze: $f(A_n) = n + 1$

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri/

Es bleibt zu zeigen, dass diese Abbildung tatsächlich bijektiv ist. Dazu beweise man Injektivität und Surjektivität.

Injektivität: Zu zeigen ist: $f(A_j) = f(A_k) \Rightarrow A_j = A_k$.

$$\begin{array}{rrcl} \text{Aus} & f(A_j) & = & f(A_k) \\ \text{folgt} & j+1 & = & k+1, \\ \text{also} & A_j & = & A_k \end{array} \qquad \Box$$

Surjektivität: Zu zeigen ist: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein Element in A_∞, das durch f auf n abgebildet wird. Da $A_{n-1} \in A_\infty$, ist in der Tat $f(A_{n-1}) = n$.

Damit ist die Abbildung bijektiv.