Prof. Dr. R. Bieri WS 2004/2005

Frankfurt/M., den 13.12.2004

Mathematik I

Serie 9[1]

Abgabetermin: Montag, 20.12.04, 8^{15} Uhr.

1. Gegeben seien $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit $ad - bc \neq 0$. Wir versuchen eine Abbildung $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ mit $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ zu konstruieren.

   (a) Zeige: f ist auf höchstens einem $x_1 \in \mathbb{Q}$ nicht definiert und nimmt höchstens einen Wert $x_2 \in \mathbb{Q}$ nicht an.

   (b) Ergänzt man $\mathbb{Q}$ durch ein Element ∞ zu $\hat{\mathbb{Q}} := \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, dann kann man $f(x_1) = \infty$ und $f(\infty) = x_2$ $\big($ bzw. $f(\infty) = \infty\big)$ setzen. Zeige: Damit wird f eine Bijektion $\hat{\mathbb{Q}} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \hat{\mathbb{Q}}$.

2. (a) Fasse die Bruchzahlen $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{Q}$ auf als Äquivalenzklassen von Zahlenpaaren in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ unter der Relation $(a, b) \sim (x, y) \Leftrightarrow ay = bx$ und beweise die Monotoniegesetzte: Für $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{B}$ gilt

   $$\begin{array}{ccccc} \alpha + \beta & \leq & \alpha + \gamma & \Leftrightarrow & \beta \leq \gamma \\ \alpha\beta & \leq & \alpha\gamma & \Leftrightarrow & \beta \leq \gamma \end{array}$$

   (b) In wieweit gelten diese auch in $\mathbb{Q}$?

3. Beschreibe die Lösungsmengen $L_{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $L_{\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $L_{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ und $L_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ der Gleichungen

   (a) $x + y - 4 = 0$
   (b) $x + y + 4 = 0$
   (c) $\mid x \mid - \mid y \mid = 4$

4. Wie Aufgabe 3) für die Ungleichungen

   (a) $x + y \leq 4$
   (b) $\mid x \mid + \mid y \mid \leq 4$
   (c) $x^2 + y^2 \leq 4$

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri/