Prof. Dr. R. Bieri WS 2004/2005

Frankfurt/M., den 3.12.2004

Mathematik I

Serie 8[1]

Abgabetermin: Montag, 13.12.04, 8^{15} Uhr.

1. Es sei $\alpha : M \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow M$ eine fest vorgegebene Permutation der endlichen Menge M.
   (a) Zeige: Es gibt Zahlen $k \in \mathbb{N}$ mit $\alpha^k = \mathrm{Id}_M$.
   (b) Definiere die **Ordnung von** α, $m = \mathrm{ord}(\alpha)$, als die kleinste der in a) beschriebenen Zahlen k; und zeige, dass jedes k mit $\alpha^k = \mathrm{Id}_M$ von m geteilt wird.
   (c) Bestimme die Ordnung der Permutation
   $$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 9 & 12 & 1 & 7 & 2 & 8 & 4 & 5 & 3 & 6 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

2. Es sei $\alpha : M \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow M$ wie oben fest vorgegeben.
   (a) Zeige, dass durch $(x \sim y) \Leftrightarrow$ (Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\alpha^n(x) = y$) auf M eine Äquivalenzrelation definiert wird und beschreibe ihre Äquivalenzklassen $M_x \subseteq M$.
   (b) Bestimme die $M_x \subseteq \{1, \ldots, 12\}$, wenn $a = \sigma$ wie oben ist.
   (c) Zeige, dass stets $\mid M_x \mid$ ein Teiler von $\mathrm{ord}(\alpha)$ ist und
   $$\mathrm{ord}(\alpha) = \mathrm{kgV}(\mid M_x \mid, x \in M).$$

3. Auf $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ betrachte man die Äquivalenzrelation $\big((a,b) \sim (a',b')\big) \Leftrightarrow (a+b' = a'+b)$. Zeige:
   (a) Das Produkt der Äquivalenzklassen ist durch $[(a,b)][(x,y)] := [(ay+bx, by+ax)]$ wohldefiniert (d.h. unabhängig von der speziellen Wahl der Repräsentanten).
   (b) Die Multiplikation der Äquivalenzklassen ist assoziativ.

4. Zeige durch Kongruenzbetrachtungen: Die Gleichung $7x^3 + 2 = y^3$ hat keine ganzzahlige Lösung.

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri/