

Frankfurt/M., den 12.11.2004

Mathematik ISerie 5¹Abgabetermin: Montag, 22.11.04, 8¹⁵ Uhr.

1. Es seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $d = \text{ggT}(a, b)$ und $e = \text{kgV}(a, b)$.
 - (a) Zeige, dass $\frac{a}{d}$ und $\frac{b}{d}$ teilerfremd sind.
 - (b) Finde alle Möglichkeiten für a, b , wenn $d = 1001$ und $e = 999999$ ist.
2. Beweise, dass die Zahlen $\sqrt{3}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ und $\sqrt[3]{25}$ nicht rational sind.
3. (a) Für welche Werte von $c \in \mathbb{Z}$ ist $4x \equiv c \pmod{12}$ lösbar?
 - (b) Bestimme alle $[r] \in \mathbb{Z}_{48}$ mit $[18][r] = [12]$.
 - (c) Bestimme alle Lösungen $[x] \in \mathbb{Z}_5$ mit
$$[x] \cdot [x] + [3][x] + [2] = [0]$$
4. (a) Welchen Rest lässt 13^{13} bei der Division durch 11, durch 12, durch 14, durch 15?
 - (b) Nach dem Satz von Fermat gilt $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ für jede Primzahl p . Im alten China glaubte man, dass aus $2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ auch folgt, dass n eine Primzahl ist. Zeige am Beispiel $n = 341$, dass das falsch ist.

¹ auch als pdf-Datei im Internet unter: <http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri/>