Prof. Dr. R. Bieri WS 2004/2005

Frankfurt/M., den 27.10.2004

Mathematik I

Serie 3[1]

Abgabetermin: Montag, 8.11.04, 8^{15} Uhr.

1. Der Graph einer Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine Teilmenge der Paarmenge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, nämlich $G_f := \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R},\ y = f(x)\}$.

   (a) Skizziere den Graph der Abbildungen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-2)^2$, $g(x) = \sqrt{|x|}$ ($|x| =$ Absolutbetrag).

   (b) Zeige: Projektion auf die erste Komponente x liefert eine bijektive Abbildung $G_f \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbb{R}$.

   (c) Welche Eigenschaften von $G_f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kennzeichnen Injektivität und Surjektivität der Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

2. Auch für beliebige Abbildungen $f : A \to B$ kann man den Graph $G_f \subseteq A \times B$ definieren. Wie? Man betrachte die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x) = (\cos x, \sin x)$, beschreibe das Bild $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und den Graph $G_f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

3. Zeige oder widerlege (durch ein Gegenbeispiel):

   (a) $(a|b$ und $a|c) \Rightarrow a^2|bc$

   (b) $a|bc \Rightarrow a|b$ oder $a|c$

   (c) $(a|b$ und $a|c) \Rightarrow a|(3b+5c)$.

4. Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

   (a) $7|(2^{3n}-1)$

   (b) $12|(n^4-n^2)$

   (c) $24|(5^{2n}-1)$

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri/