Prof. Dr. R. Bieri WS 2004/2005

Frankfurt/M., den 17.1.2005

Mathematik I

Serie 12[1]

Abgabetermin: Montag, 24.1.05, 8^{15} Uhr.

1. Bestimme die Nullstellen der Polynome
   (a) $f(X) = 3X^2 + 4X + 5 \in \mathbb{C}[X]$
   (b) $g(X) = X^2 + 2iX + 1 \in \mathbb{C}[X]$

2. Es sei $f(X)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten. Zeige: Wenn $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $f(X)$ ist, dann ist auch die konjugierte komplexe Zahl $\overline{z} \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $f(X)$. Schliesse daraus, dass jedes Polynom $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ mit ungeradem Grad in $\mathbb{R}$ eine Nullstelle hat.

3. Es sei $a \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl. Zeige $X^n - a$ hat in $\mathbb{C}$ für jedes $n \geq 1$ eine Nullstelle. Bestimme die zwei Nullstellen von $X^2 - (4 + 3i)$.

4. Es sei $f(X)$ das Polynom $X^2 + aX + b \in \mathbb{C}[X]$. Wie groß muss der Radius $R =\mid z \mid$ sein, damit man garantieren kann, dass das Bild des Kreises $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = R(\cos\varphi + i\ \sin\varphi)\}$ unter $f : S^1 \to \mathbb{C}$ den Nullpunkt $0 \in \mathbb{C}$ zweimal umrundet?

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri/